Биндюк Глеб Игоревич

МО-231

Вариант – 2

**Задание 25.** Показать, что множество с обычными операциями сложения и умножения является кольцом. Коммутативно ли это кольцо? Ассоциативно ли? Если это кольцо содержит единицу, то найти обратимые элементы.

Проверим замкнутость “ + ” и “ \* ”:

“ + “ :

Так как сумма целых чисел – число целое, то “ + “ замкнута;

“ \* ” :

Так как произведение двух целых чисел – число целое, а сумма целых чисел – число целое, то “ \* ” замкнута.

Тогда – алгебра.

Рассмотрим - группоид;

“ + “ - коммутативна:

G – полугруппа, так как

G – моноид, так как

G – абелева группа, так как

“ \* “ дистрибутивно относительно “ + “:

Значит, – кольцо.

“ \* “ ассоциативно, так как

Значит, – ассоциативное кольцо

Значит, – ассоциативное, коммутативное кольцо

Если а = 0 (или b = 0 ), получим:

В случае a=b=0 получаем:

То есть для любой матрицы из М существует единица, поэтому – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей.

Найдем обратимые элементы:

Из полученных формул видно, что только одна матрица обратима в кольце (c,d :

Во всех остальных случаях числа c и d выходят за рамки множества целых чисел.

**Задание 26.** Сколькими способами из колоды карт в 36 листов можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборы были бы точно: 1 крестовая карта, 2 дамы и нет червей.

Рассмотрим случаи:

1. Среди двух дам есть крестовая карта:

Крестовую даму можно выбрать единственным способом, другая дама будет выбираться из двух оставшихся и число способов дамы равно . К выбранным трём картам надо добавить до пяти еще три карты так, чтобы они не были дамами, червовыми и крестовыми картами.

Таких карт в колоде 16 штука. Число неупорядоченных выборок из 16 по 3 без повторений равно .

По правилу произведения, число способов выбора 5 карт, среди которых есть крестовая дама, равно .

2. Среди двух дам нет крестовой карты:

Выбираем две дамы из двух (, одну карту из крестовых (всего 8 – без крестовой дамы) и две другие карты, не являющиеся ни дамами, ни крестовыми, ни червями – то есть число неупорядоченных выборок из 16 по 2 без повторений .

По правилу произведения, число способов выбора 5 карт, среди которых нет крестовой дамы, равно .

Тогда всего способов выбора 5 карт, удовлетворяющих условию задачи, равно

Ответ: 2080 способов.

**Задание 27.** Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова ворон. При условии, что две буквы “о” не стоят рядом.

Общее количество различных слов, полученных перестановкой букв слова ворон равно:

Если в каком-то слове все две буквы “о” стоят рядом, то двойную “о” можно считать единым символом, и количество слов, в которых две буквы “о” стоят рядом, равно

В итоге получаем:

Ответ: 36 слов.

**Задание 28.** Найти наибольший член разложения бинома .

Пусть ­– наибольший член разложения бинома , . Тогда и .

Получаем систему неравенств:

или:

После сокращений имеем: , или , откуда , получаем двойное неравенство для k:

*.* Подставляя приближенное значение , получим: .

Единственное целое значение k, удовлетворяющее этому двойному неравенству, равно 15.

Следовательно, наибольший член разложения бинома имеет номер k, равный 15 и

Ответ: .

**Задание 29.** Из данной пропорции найти x и y.

Записав отдельно отношение первого члена пропорции ко второму и второго к третьему, после сокращения получим:

В силу условия задачи мы приходим к системе:

Решив её, получим:

Ответ:

**Задание 30.** Найти коэффициент при в разложении выражения по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид:

.

Для отыскания всех случаев, в которых возникает , решаем в целых неотрицательных числах уравнение .

Выразим k: . Видно, что k принимает целые значения, если 16 - n кратно 5. Выпишем все такие случаи:

Для каждой найденной пары значений n, k значение m находим из уравнения . Получим 4 набора :

Слагаемые, содержащие , таковы:

В итоге, коэффициент при имеет вид:

Ответ:

**Задание 31.** Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, ни на 5?

Очевидно, что если число не делится на 2, то оно и подавно не будет делиться на 4. Поэтому число 4 в условии можно просто опустить.

Заметим, что на 2 делится каждое второе натуральное число, но 3 — каждое третье, на 5 — каждое пятое, на 2 и на 3 — каждое шестое и т.д. Воспользуемся формулой включений и исключений, обозначив искомое число через М, а через [a] будем обозначать целую часть числа а. Получим:

Ответ: 2666 чисел.

**Задание 32.** Подсчитать количество различных перестановок цифр числа 6858757, при которых никакие 2 одинаковые цифры не идут друг за другом.

Общее количество различных перестановок цифр числа 6858757 равно

Если две какие-то одинаковые цифры стоят рядом, мы можем считать эту двойную цифру единым символом. Тогда количество перестановок, содержащих этот символ, равно

Заметим, что количество таких случаев равно .

Аналогично, количество перестановок, в которых присутствуют пара двойных символов, равно , количество таких случаев равно , а общее число перестановок, образованных парами одинаковых цифр, равно .

В итоге, применяя формулу включений и исключений, будем иметь:.

Ответ: 456 перестановок.